

Quando possiamo dire che due dimostrazioni non sono la stessa?

Matteo Acclavio



World Logic Day 2023, Libreria Tomo, 13/01/2023

I problemi di Hilbert



Secondo Congresso Internazionale di Matematica



Secondo Problema:

È possibile dimostrare che l'aritmetica è consistente?



Secondo Problema:

È possibile dimostrare che l'aritmetica è consistente?

Soluzioni:

- Se ho una teoria logica in cui posso esprimere l'aritmetica, allora ci sono degli enunciati che non sono ne veri ne falsi...
- ... e la consistenza di questa teoria non può essere dimostrata nella teoria stessa. [Gödel '31]
- ma può essere dimostrata in ϵ_0 [Gentzen '36]

Secondo Problema:

È possibile dimostrare che l'aritmetica è consistente?

Tecniche sviluppate per rispondere

- Funzioni ricorsive primitive (Gödel);
- λ -calculus (Church);
- Macchine di Turing.

Il 24-esimo problema (riscoperto solo nel 2000) :

Come dire quando una prova di un teorema è “la più semplice”?

Il 24-esimo problema (riscoperto solo nel 2000) :

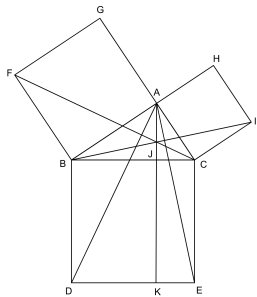
Come dire quando una prova di un teorema è “la più semplice”?

- Come si formalizza una prova?
- Come si fa a distinguere due prove?

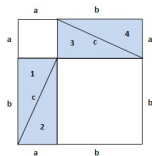
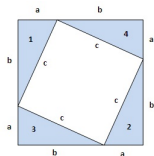
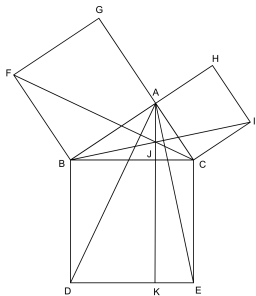
Esempio

Teorema di Pitagora

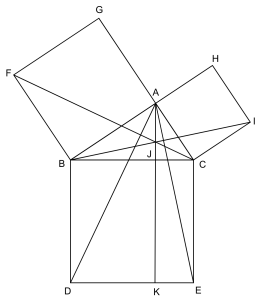
Teorema di Pitagora



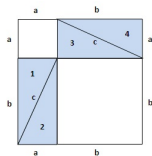
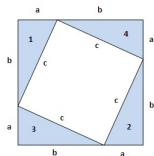
Teorema di Pitagora



Teorema di Pitagora



?



Come si formalizza una prova?

Una prova è ...

- Saper rispondere ai dubbi di chi non è convinto

Una prova è ...

- Saper rispondere ai dubbi di chi non è convinto
- Una sequenza di istruzioni elementari per ricostruirla

Una prova è ...

- Saper rispondere ai dubbi di chi non è convinto
- Una sequenza di istruzioni elementari per ricostruirla
- Mettere insieme i “pezzi” in modo corretto

Come si fa a distinguere due
prove?

Figure

$$\frac{\frac{\overline{a, \bar{a}} \text{ AX}}{a, \bar{a} \otimes \bar{b}, b} \otimes \frac{\overline{\bar{b}, b} \text{ AX}}{c, \bar{c}}}{a \mathfrak{Y} (\bar{a} \otimes \bar{b}), b} \mathfrak{Y} \frac{\frac{\overline{c, \bar{c}} \text{ AX}}{d, \bar{d}} \otimes \frac{\overline{\bar{d}, d} \text{ AX}}{c, \bar{c} \otimes \bar{d}, d}}{c, \bar{c} \otimes \bar{d}, d} \otimes \frac{a \mathfrak{Y} (\bar{a} \otimes \bar{b}), b \otimes c, d, \bar{c} \otimes \bar{d}}{a \mathfrak{Y} (\bar{a} \otimes \bar{b}), (b \otimes c) \mathfrak{Y} d, \bar{c} \otimes \bar{d}} \mathfrak{Y}$$

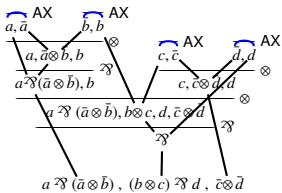
≈

$$\frac{\frac{\overline{\bar{b}, b} \text{ AX}}{a, \bar{a}} \text{ AX} \otimes \frac{\frac{\overline{c, \bar{c}} \text{ AX}}{\bar{b}, b \otimes c, \bar{c}} \otimes \frac{\overline{\bar{d}, d} \text{ AX}}{\bar{b}, b \otimes c, \bar{c} \otimes \bar{d}, d} \mathfrak{Y}}{(b \otimes c) \mathfrak{Y} d, \bar{c} \otimes \bar{d}} \mathfrak{Y}}{a, \bar{a} \otimes \bar{b}, (b \otimes c) \mathfrak{Y} d, \bar{c} \otimes \bar{d}} \otimes \frac{a \mathfrak{Y} (\bar{a} \otimes \bar{b}), (b \otimes c) \mathfrak{Y} d, \bar{c} \otimes \bar{d}}{a \mathfrak{Y} (\bar{a} \otimes \bar{b}), (b \otimes c) \mathfrak{Y} d, \bar{c} \otimes \bar{d}} \mathfrak{Y}$$

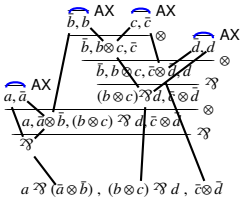
$$\begin{array}{c}
\frac{\overbrace{a, \bar{a}}^{\text{AX}}}{a, \bar{a} \otimes \bar{b}, b} \otimes \frac{\overbrace{b, b}^{\text{AX}}}{c, \bar{c}} \quad \frac{\overbrace{c, \bar{c}}^{\text{AX}}}{c, \bar{c} \otimes \bar{d}, d} \otimes \frac{\overbrace{d, d}^{\text{AX}}}{d, d} \\
\frac{a \mathfrak{Y} (\bar{a} \otimes \bar{b}), b}{a \mathfrak{Y} (\bar{a} \otimes \bar{b}), b \otimes c, d, \bar{c} \otimes \bar{d}} \otimes \\
\frac{a \mathfrak{Y} (\bar{a} \otimes \bar{b}), b \otimes c, d, \bar{c} \otimes \bar{d}}{a \mathfrak{Y} (\bar{a} \otimes \bar{b}), (b \otimes c) \mathfrak{Y} d, \bar{c} \otimes \bar{d}} \mathfrak{Y}
\end{array}$$

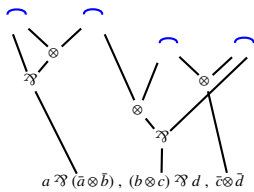
≈

$$\begin{array}{c}
\frac{\overbrace{b, b}^{\text{AX}}}{\bar{b}, b \otimes c, \bar{c}} \otimes \frac{\overbrace{c, \bar{c}}^{\text{AX}}}{d, d} \otimes \frac{\overbrace{d, d}^{\text{AX}}}{d, d} \\
\frac{\overbrace{a, \bar{a}}^{\text{AX}}}{a, \bar{a} \otimes \bar{b}, (b \otimes c) \mathfrak{Y} d, \bar{c} \otimes \bar{d}} \otimes \frac{\bar{b}, b \otimes c, \bar{c} \otimes \bar{d}, d}{(b \otimes c) \mathfrak{Y} d, \bar{c} \otimes \bar{d}} \mathfrak{Y} \\
\frac{a, \bar{a} \otimes \bar{b}, (b \otimes c) \mathfrak{Y} d, \bar{c} \otimes \bar{d}}{a \mathfrak{Y} (\bar{a} \otimes \bar{b}), (b \otimes c) \mathfrak{Y} d, \bar{c} \otimes \bar{d}} \mathfrak{Y}
\end{array}$$

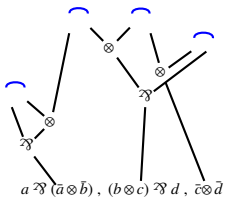


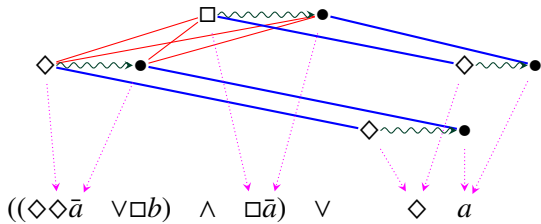
\cong





\cong





Perché?

Grazie dell'attenzione