Il Teorema di Pitagora

Acclavio Matteo

Dipartimento di Matematica e Fisica, Università Roma Tre

Sommario

Il teorema di Pitagora è un teorema della geometria (euclidea) piana che stabilisce una relazione tra la lunghezza dell'ipotenusa e la lunghezza dei cateti di un triangolo rettangolo.

In questo breve articolo daremo una dimostrazione del teorema e vedremo come questo risultato è correlato con il calcolo della distanza di due punti del piano.

1 Introduzione

Il teorema di Pitagora è un teorema di geometria che stabilisce una relazione di proporzionalità tra la lunghezza dell'ipotenusa e le lunghezze dei due cateti di un triangolo rettangolo. Possiamo enunciarlo nel modo seguente:

In ogni triengolo rettangolo, l'area del quadrato costruito sull'ipotenusa è uguale alla somma delle aree dei quadrati costruiti sui cateti.

Sebbene la dimostrazione del teorema sia attribuita al matematico e filosofo Pitagora, si hanno testimonianze che il suo enunciato fosse noto ai Babilonesi e agli Egizi. Inoltre, si hanno testimonianze di dimotrazioni indipendenti del teorema sviluppate in India[1] e in Cina[2].

In questo breve articolo esponiamo la dimostrazione del teorema conosciuta come *dimostrazione di Pomi*. Successivamente, faremo vedere come questo risultato viene utilizzato per il calcolo della distanza di due punti del piano di cui sono date le coordinate.

Nella Sezione 2 diamo le definizioni di base e le notazioni necessarie per la formalizzazione del teorema che viene dimostratione nella Sezione 3.

2 Contesto

Il teorema di Pitagora è un teorema di *geometria euclidea piana*. Per geometria euclidea piana intendiamo la geometria del piano che soddisfa gli assiomi dati nel libro di Euclide "Elementi"[4, 2].

[1] Dimostrazione presente nei trattai dai titoli *Yuktibhasa*[7] e *Sulbasutra*[5]

[2] Dimostrazione presente all'interno del libro *Zhoubi Suanjing*[8]

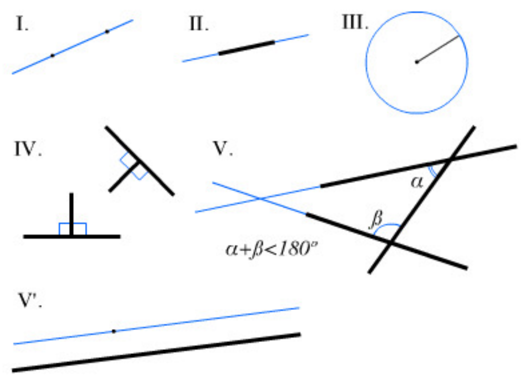


Figura 1: Gli assiomi della geometria eclidea

Definizione 2.1 (Assiomi della Geometria Euclidea)**.** Nella geometria euclidea sono considerati validi i seguenti assiomi:

1. Tra due punti qualsiasi è possibile tracciare una ed una sola retta;
2. Si può prolungare un segmento oltre i due punti indefinitamente;
3. Dato un punto e una lunghezza, è possibile descrivere un cerchio;
4. Tutti gli angoli retti sono congruenti tra loro;
5. Se una retta che taglia altre due rette determina dallo stesso lato angoli interni minori di due angoli retti, prolungando le due rette, esse si incontreranno dalla parte dove i due angoli sono minori di due retti.

Nella Figura 1 possiamo osservare una rappresentazione grafica degli assiomi. Sebbene questi assiomi risultino intuitivamente "sensati", numerose geometrie possono essere definite senza prendere in considerazione il quinto postulato [3] e sono per questo definite *non-euclidee*.

Definizione 2.2 (Triangolo Rettangolo)**.** Un *poligono* è una figura geometrica piana delimitata da una linea spezzata chiusa.

Un *triangolo* è un poligono a tre lati. Si dice *rettangolo* se un suo angolo è un angolo retto. L'*ipotenusa* è il lato del triangolo opposto all'angolo retto mentre chiameremo *cateto* un lato del triangolo adiacente all'angolo retto.

Ricordiamo inoltre il seguente risultato, che è consequenza del Postulato 5, ma di cui omettiamo la dimostrazione.

Corollario 2.1. La somma degli angoli interni di un triangolo è pari alla somma di due angoli retti.

3 Il teorema di Pitagora

La dimostazione di Pomi risulta particolarmente semplice per la sua immediatezza grafiche.

Teorema 3.1. Dato un triangolo rettangolo con i due cateti di lunghezza a e b e ipotenusa di lunghezza c, allora

$$a^2 + b^2 = c^2$$

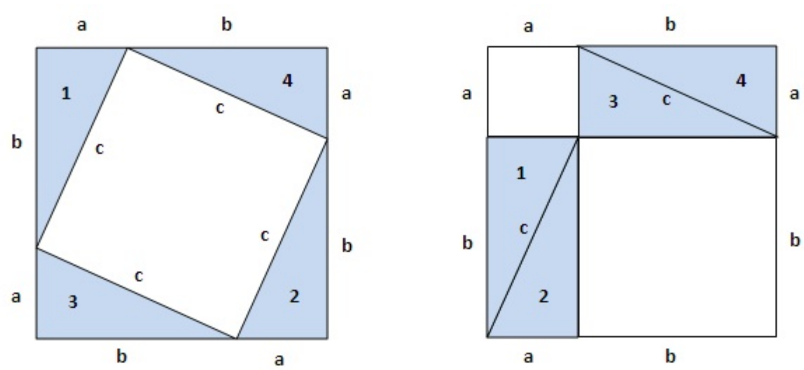
Dimostrazione. Consieriamo il traingolo rettangolo $\mathcal{T}$ con cateti a e b e ipotenusa c.

Consideriamo quattro copie di $\mathcal{T}$ e le disponiamo all'interno di un quadrato $\mathcal{Q}$ di lato $a + b$ nei due seguenti modi:

- si fa coincidere l'angolo retto di ogni copia di $\mathcal{T}$ con uno degli angoli (retti) del quadrato;

- uniamo le quattro copie di $\mathcal{T}$ in due rettangoli con lati a e b ottenuti unendo due copie di $\mathcal{T}$ lungo le ipotenuse. Disponiamo i due rettangoli in modo che uno dei loro angoli coincida con un angolo del quadrato e in modo che i due rettangoli siano tangenti in un vertice.

Graficamente, le due costruzioni possono essere visualizzate nel seguente modo:



L'area dei due quadrati di lato $a + b$ è la stessa siccome loro lati sono congruenti. Inoltre l'area del primo quadrato è data dal quadrato di lato c interno più la somma di quattro aree del triangolo $\mathcal{T}$, cioè $A(\mathcal{Q}) = c^2 + 4 \cdot A(\mathcal{T})$. Nello stesso modo, l'area del secondo quadrato è data dalla somma dei quadrati di lato a e di lato b più la somma di quattro aree del triangolo $\mathcal{T}$, cioè $A(\mathcal{Q}) = a^2 + b^2 + 4 \cdot A(\mathcal{T})$.

Siccome $A(\mathcal{Q}) = c^2 + 4 \cdot A(\mathcal{T})$ e $A(\mathcal{Q}) = a^2 + b^2 + 4 \cdot A(\mathcal{T})$, ne segue che $c^2 + 4 \cdot A(\mathcal{T}) = a^2 + b^2 + 4 \cdot A(\mathcal{T})$ e quindi che $c^2 = a^2 + b^2$. $\square$

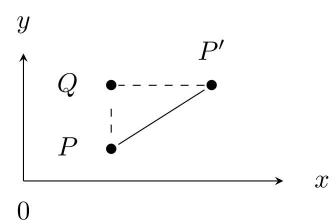
Per quanto segue, assumeremo che il lettore conosca la nozione di *sistema di riferimento cartesiano in due dimensioni* [6] comunemente noto come *piano cartesiano*.

Corollario 3.2. Dati due punti del piano cartesiano di coordinate $P = (a, b)$ e $P' = (a', b')$, la distanza tra questi due punti è $|PP'| = \sqrt{(a-a')^2 + (b-b')^2}$.

Dimostrazione. Si consideri il punto $Q = (a, b')$, cioè con la prima coordinata uguale alla prima coordinata di P e la seconda coordianta uguale alla seconda coordinata di P'.

Quindi avremo che $Q = P'$ se e solamente se P e P' sono due punti di una retta parallela all'asse delle y. In questo caso, $a = a'$ e quindi $a - a' = 0$. Ne segue che la distanza $|PP'|$ si riduce a $|PP'| = \sqrt{(b-b')^2} = |b - b'|$.

Altrimenti chiamiamo $\mathcal{T}$ il triangolo con vertici P, P' e Q. Siccome P e Q hanno la stessa ascissa (i.e. la prima coordinata del punto), allora il segmento $\overline{PQ}$ è parallelo all'asse delle y. Allo stesso modo P' e Q hanno la stessa ordinata (i.e. la seconda coordinata del punto), allora il segmento $\overline{P'Q}$ è parallelo all'asse delle x. Siccome l'asse delle x e quello delle y formano un angolo retto nel piano cartesiano, per il quinto postulato, l'angolo in Q del triangolo $\mathcal{T}$ è retto.



Sappiamo che la lunghezza del segmento $\overline{PQ}$ è $|\overline{PQ}| = |b-b'|$ e lunghezza del segmento $\overline{P'Q}$ è $|\overline{P'Q}| = |a - a'|$. Quindi possiamo concludere per il Teorema 3.1 che

$$|\overline{PP}| = \sqrt{|\overline{PQ}|^2 + |\overline{P'Q}|^2} = \sqrt{(b-b')^2 + (a-a')^2}$$

□

4 Conclusioni

Il teorema fornisce una semplice soluzione per calcolare la distanza tra due punti del piano delle quali vengono fornite le coordinate. Infatti l'ortogonalità degli assi del piano permette di costruire in modo molto semplice un triangolo rettangolo con ipotenusa due punti dati.

Risulta quindi possibile utilizzare il teorema di Pitagora per generalizzare il Corollario 3.2 al fine di calcolare la distanza di due punti dello spazio (euclideo) tridimensionale, o più in generale in uno spazio n dimensionale ma di questo risultato verrá trattato nei prossimi lavori. Congetturiamo di poter generalizzare questa nozione di distanza anche per spazi degli spazi euclidei di dimensione infinita[3].

[3] Questa nozione di distanza è stata apliamente studiata in analisi funzionale e prende il nome di *norma* ℓ^2 [1].

Riferimenti bibliografici

[1] Haim Brezis. *Analisi funzionale: teoria e applicazioni*, volume 9. Liguori Editore Srl, 1986.

[2] Oliver Byrne. *The first six books of the Elements of Euclid: in which coloured diagrams and symbols are used instead of letters for the greater ease of learners*. William Pickering, 1847.

[3] Viacheslav V Nikulin and Igor R Shafarevich. *Geometries and groups*. Springer Science & Business Media, 2012.

[4] Wikipedia. Elementi (Euclide) — Wikipedia, the free encyclopedia. `https://it.wikipedia.org/wiki/Elementi_%28Euclide%29`, 2019.

[5] Wikipedia. Shulba Sutras — Wikipedia, the free encyclopedia. `https://en.wikipedia.org/wiki/Shulba_Sutras`, 2019.

[6] Wikipedia. Sistema di riferimento cartesiano — Wikipedia, the free encyclopedia. `https://it.wikipedia.org/wiki/Sistema_di_riferimento_cartesiano`, 2019.

[7] Wikipedia. Yuktibhāsā — Wikipedia, the free encyclopedia. `https://en.wikipedia.org/wiki/Yuktibhs`, 2019.

[8] Wikipedia. Zhoubi Suanjing — Wikipedia, the free encyclopedia. `https://en.wikipedia.org/wiki/Zhoubi_Suanjing`, 2019.